 Un corrigé

Partie I : Préliminaires

1. Calcul de I_e

(a) Appliquons le théorème de continuité sous signe intégrale.

$$h : \mathbf{R} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$$

Soit la fonction

$$(x, t) \mapsto \frac{e^{-(1+t^2)\frac{x^2}{2}}}{1+t^2}$$

- $\forall x \in \mathbf{R}, t \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- $\forall t \in [0, +\infty[, x \mapsto h(x, t)$ est continue sur $\mathbf{R}$.
- $\forall (x, t) \in \mathbf{R} \times [0, +\infty[, |h(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$ et la fonction majorante est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, $\mathcal{F}$ est continue sur $\mathbf{R}$.

D'autre par, $0 \leq h(x, t) \leq \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{1+t^2}$ pour tout $(x, t) \in \mathbf{R} \times [0, +\infty[$. Donc, par intégration, $0 \leq \mathcal{F}(x) \leq$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{x^2}{2}}. \text{ Donc on peut déduire que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(x) = 0.$$

$$h : \mathbf{R} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$$

(b) Soit la fonction

$$(x, t) \mapsto \frac{e^{-(1+t^2)\frac{x^2}{2}}}{1+t^2}$$

- $\forall x > 0, t \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et intégrable sur $[0, +\infty[$.
- $\forall t \in [0, +\infty[, x \mapsto h(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et l'on a :

$$\forall (x, t) \in \mathbf{R}_+^* \times [0, +\infty[, \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -xe^{-(1+t^2)\frac{x^2}{2}}$$

- $\forall x > 0, t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
- Si $[a, b] \subset]0, +\infty[, \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq be^{-(1+t^2)\frac{a^2}{2}}$ et la fonction majorante est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, $\mathcal{F}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et l'on a $\forall x > 0,$

$$\mathcal{F}'(x) = -x \int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)\frac{x^2}{2}} dt = -xe^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2 t^2}{2}} dt.$$

En utilisant le changement de variable $u = xt$, on obtient :

$$\mathcal{F}'(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = -\alpha e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Donc, pour tout $x > 0, \mathcal{F}(x) = \int_0^x \mathcal{F}'(t) dt + cte = -\alpha \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt + cte$. Or $\mathcal{F}$ est continue en 0, alors

$$\mathcal{F}(0) = cte = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}. \text{ D'où } \mathcal{F}(x) = -\alpha \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{\pi}{2}.$$

(c) On a, $\forall x > 0$, $\mathcal{F}(x) = \frac{\pi}{2} - \alpha \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $0 = \frac{\pi}{2} - \alpha^2$ et comme $\alpha > 0$, alors $\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. D'où :

$$I_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e(t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1.$$

2. (a) Si $f \in \mathcal{C}_b(\mathbf{R})$ alors $\left| f(t) e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leq \|f\|_\infty e^{-\frac{t^2}{2}}$ et la fonction majorante est intégrable sur $\mathbf{R}$, donc I_f existe et on a :

$$|I_f| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \|f\|_\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \|f\|_\infty.$$

L'application $\gamma : (\mathcal{C}_b(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbf{R}, |\cdot|)$ est linéaire (par linéarité de l'intégrale), de plus $|I_f| \leq \|f\|_\infty$. Donc γ est continue et comme $H = \ker \gamma = \gamma^{-1}(\{0\})$, alors $\mathcal{H}$ est un fermé de $\mathcal{C}_b(\mathbf{R})$ comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

(b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n(t) e^{-\frac{t^2}{2}} = t^{2n} e^{-\frac{t^2}{2}} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc la fonction $t \mapsto f_n(t) e^{-\frac{t^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$, donc I_{f_n} existe. À l'aide d'une intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} I_{f_n} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \left[\frac{1}{2n+1} t^{2n+1} e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2n+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n+1} (-t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2n+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2n+1} I_{f_{n+1}}. \end{aligned}$$

On montre par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $I_{f_n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$. En effet, $I_{f_0} = I_e = 1$ et si $I_{f_n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ alors

$$I_{f_{n+1}} = (2n+1) I_{f_n} = 2n+1 \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n+2)!}{(2n+2) 2^n n!} = \frac{(2(n+2))!}{2^{n+1} (n+1)!}.$$

(c) Puisque f est bornée, alors I_f est bien défini. On a $\cos(\pi t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \pi^{2n} t^{2n}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, donc :

$$I_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \pi^{2n} t^{2n} \right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h_n(t) dt$$

$$\text{où } h_n(t) = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \pi^{2n} t^{2n} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Les fonctions h_n sont continues par morceaux et intégrables sur $\mathbf{R}$. La série $\sum_{n \in \mathbf{N}} h_n$ converge simplement vers

$x \mapsto \cos(\pi x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ qui est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$ et la série numérique $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} \int_{-\infty}^{+\infty} |h_n(t)| dt$ converge

puisque $\int_{-\infty}^{+\infty} |h_n(t)| dt = \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} I_{f_n} = \frac{\pi^{2n}}{2^n n!}$ qui est le terme général d'une série convergente. Donc on peut intégrer terme à terme la série :

$$I_f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-\pi^2}{2}\right)^n}{n!} = e^{-\frac{\pi^2}{2}}.$$

3. Calcul de I_e

(a) Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = |l|$, donc pour $\varepsilon = 1$, il existe $A > 0$ tel que $x \geq A \Rightarrow ||f(x)| - |l|| \leq 1$. Donc $|f(x)| \leq |l| + 1$ dès que $x \geq A$.

Par ailleurs f est continue sur le compact $[0, A]$, donc il existe $k > 0$ tel que $\forall x \in [0, A], |f(x)| \leq K$. Ainsi, $\forall x \in [0, +\infty[, |f(x)| \leq \max(|l| + 1, K)$ et donc f est bornée sur $[0, +\infty[$.

(b) On a $\Psi'(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} + \frac{1}{t^2} e^{-\frac{t^2}{2}} = \left(\frac{1+t^2}{t^2}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} \underset{+\infty}{\sim} e^{-\frac{t^2}{2}}$. D'autre part, par le théorème d'intégration des relations de comparaison, on en déduit que

$$\Phi_e(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \underset{+\infty}{\sim} e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} \Psi'(t) dt = e^{\frac{x^2}{2}} [\Psi(t)]_x^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

(c) Comme Φ_e est continue sur $\mathbf{R}_+$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi_e(x) = 0$ (car $\Phi_e(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$), d'après 3 (a), il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in \mathbf{R}_+, |\Phi_e(x)| \leq M$.

De même pour la fonction $x \mapsto x\Phi_e(x)$.

Partie II : Un endomorphisme de $\mathcal{C}_b(\mathbf{R})$

4. (a) Puisque f est bornée sur $\mathbf{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$, donc Φ_f est bien définie pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$|\Phi_f(x)| \leq \|f\|_\infty e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \|f\|_\infty \Phi_e(x) \leq M \|f\|_\infty$$

et

$$x |\Phi_f(x)| \leq \|f\|_\infty x e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \|f\|_\infty x \Phi_e(x) \leq M' \|f\|_\infty$$

(b) Si $f \in \mathcal{H}$ alors $\int_x^{+\infty} f(t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\int_{-\infty}^x f(t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Par suite

$$\Phi_f(-x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} f(t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^x f(t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{-x} f(t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Par le changement de variable $u = -t$, on obtient

$$\Phi_f(-x) = -e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} f(-u)e^{-\frac{u^2}{2}} du = -\Phi_{\hat{f}}(x).$$

Donc pour $x \in \mathbf{R}^+$

$$|\Phi_f(-x)| = |\Phi_{\hat{f}}(x)| \leq M \|\hat{f}\|_\infty = M \|f\|_\infty$$

et

$$|-x\Phi_f(-x)| = |x\Phi_{\hat{f}}(x)| \leq M' \|f\|_\infty.$$

Ce qui donne les majorations demandées sur $\mathbf{R}$.

5. Pour $f \in \mathcal{C}_b(\mathbf{R})$ et $t \in \mathbf{R}$, $|f(t) - I_f| \leq |f(t)| + |I_f| \leq 2\|f\|_\infty$, donc pour $x \in \mathbf{R}$, $|T(f)(x)| \leq M \|f - I_f\|_\infty \leq 2M \|f\|_\infty$ et de même $|xT_f(x)| \leq 2M' \|f\|_\infty$.

De plus T_f est continue puisque l'application $x \mapsto \int_x^{+\infty} ((f(t) - I_f)e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ est dérivable et l'application $x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}}$ est continue. Comme elle est bornée, $T_f \in \mathcal{C}_b(\mathbf{R})$.

T est clairement linéaire, T est bien un endomorphisme continu de $\mathcal{C}_b(\mathbf{R})$ puisque $\|T_f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbf{R}} |T_f(x)| \leq$

$2M \|f\|_\infty$.

6. (a) On a T_f est le produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. L'application $x \mapsto \int_x^{+\infty} ((f(t) - I_f)e^{-\frac{t^2}{2}}) dt$ est dérivable de dérivée $x \mapsto (-f(x) + I_f)e^{-\frac{x^2}{2}}$, donc

$$\forall x \in \mathbf{R}, T_f'(x) = xT_f(x) - f(x) + I_f.$$

- (b) La solution de l'équation homogène est donnée par $y_h(x) = ce^{\frac{x^2}{2}}$, de plus T_f est un solution particulière, d'où la solution générale $x \mapsto ce^{\frac{x^2}{2}} + T_f$.

7. Pour $x \in \mathbf{R}, T_f'(x) = xT_f(x) - f(x) + I_f$ et donc $|T_f'(x)| \leq |xT_f(x)| + |f(x)| + |I_f| \leq 2(M' + 1)\|f\|_\infty$. Ceci montre que $T_f \in \mathcal{C}_b^1(\mathbf{R})$ pour tout $f \in \mathcal{C}_b(\mathbf{R})$.

L'application T n'est pas surjective, par exemple l'application $f : x \mapsto \cos(x^2)$ est dans $\mathcal{C}_b(\mathbf{R})$ mais sa dérivée $f' : x \mapsto -2x \sin(x^2)$ n'appartient pas à $\mathcal{C}_b^1(\mathbf{R})$.

Partie III : Étude spectrale de T

8. On remarque que $\forall x \in \mathbf{R}, T_e(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} (1 - I_e)e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi_e(x) - I_e\Phi_e(x) = 0$. Donc 0 est une valeur propre de T et e est un vecteur propre associé.

Si f est un vecteur propre associé à 0, alors $\forall x \in \mathbf{R}, 0 = f(x) - I_f = 0$ et donc $f = I_f$, c'est-à-dire f est constante. D'où $E_0(T) = \ker(T) = \text{Vect}(e)$, l'espace des fonctions constantes.

9. Soit λ une valeur propre de T alors il existe $f \in \mathcal{C}_b(\mathbf{R})$ non nulle telle que $Tf = \lambda f$. Comme

$$\forall x \in \mathbf{R}, |Tf(x)| = |\lambda| |f(x)| \leq 2M \|f\|_\infty,$$

d'où $|\lambda| \|f\|_\infty \leq 2M \|f\|_\infty$ ce qui donne $|\lambda| \leq 2M$.

10. (a) Pour tout $x \in \mathbf{R}, |S(f)(x) - S(g)(x)| = |\lambda| |Tf(x) - Tg(x)| \leq 2M |\lambda| \|f - g\|_\infty$ et $k = 2M |\lambda| < 1$.
 (b) Soit $x \in \mathbf{R}$, on a $|f_1(x) - f_0(x)| = |h(x)| \leq \|h\|_\infty$. Supposons la propriété vraie à l'ordre n . On a :

$$|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = |S(f_{n+1})(x) - S(f_n)(x)| \leq k \|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq k^{n+1} \|h\|_\infty.$$

Comme la série géométrique $\sum_{n \in \mathbf{N}} k^n$ converge, on en déduit la convergence normale et donc uniforme de la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} (f_{n+1} - f_n)$.

- (c) Soit f la somme de cette série, alors $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (f_{k+1} - f_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Par suite f est limite uniforme de la suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$.
 Comme $S(f_n) = f_{n+1}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (h + \lambda T f_n) = h + \lambda T f$. Par continuité de l'endomorphisme T , on en déduit que $h + \lambda T f = f$.

Partie IV : Restriction de T à $\mathcal{C}_b^1(\mathbf{R})$

11. On sait que $\forall x \in \mathbf{R}, T_f'(x) = xT_f(x) - f(x) + I_f$, donc si $f \in \mathcal{C}_b^1(x)$ alors T_f' est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et donc $T_f''(x) = T_f(x) + xT_f'(x) - f'(x)$.

12. Soit $x \in \mathbf{R}$, d'après la question précédente on a :

$$|T_f''(x)| \leq |T_f(x)| + |xT_f'(x)| + |f'(x)| \leq 2M \|f\|_\infty + C_1 N(f) + \|f'\|_\infty \leq (\max(2M, 1) + C_1) N(f)$$

D'après l'inégalité des accroissements finies appliquée à T_f' on a l'inégalité

$$|T_f'(x) - T_f'(y)| \leq CN(f) |x - y|.$$

La formule de Taylor-Lagrange assure l'existence d'un élément c entre x et y vérifiant :

$$T_f(x) = T_f(y) + (x - y)T'_f(y) + \frac{(x - y)^2}{2}T''_f(c).$$

Donc

$$|T_f(x) - T_f(y) - (x - y)T'_f(y)| = \frac{(x - y)^2}{2}|T''_f(c)| \leq \frac{CN(f)}{2}(x - y)^2.$$

Partie V : Applications

13. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $E(X_n) = 0$, puis par linéarité de l'espérance $E(M_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}E(S_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n E(X_k) = 0$.

De même, $V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = E(X_n^2) = 1$, puis par indépendance des variables X_n , on a $V(M_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n V(X_k) = 1$.

Soit $\varepsilon > 0$. La variable aléatoire M_n admet une variance finie, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on obtient :

$$p(|M_n| \geq \varepsilon) = p(|M_n - E(M_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(M_n)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

14. On a $X_i(\Omega) = \{-1, 1\}$, donc $X_i + 1(\Omega) = \{0, 2\}$ et $\frac{X_i + 1}{2}(\Omega) = \{0, 1\}$. Par conséquent, $\sum_{i=1}^n \frac{X_i + 1}{2} = \frac{S_n + n}{2}$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. De plus $p\left(\frac{X_i + 1}{2} = 0\right) = p(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ et $p\left(\frac{X_i + 1}{2} = 1\right) = p(X_i = 1) = \frac{1}{2}$, donc chaque $\frac{X_i + 1}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$ et par suite $\frac{S_n + n}{2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i + 1}{2}\right)$ suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2} : \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.
On a donc $\frac{S_n + n}{2}(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ implique $S_n(\Omega) = \{2k - n \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$p(S_n = 2k - n) = p\left(\frac{S_n + n}{2} = k\right) = \mathfrak{C}_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \mathfrak{C}_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

15. D'après l'égalité (1) avec $x = M_n$, on a $-f(M_n) + I_f = T'_f(M_n) - M_n T_f(M_n)$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que

$$I_f - E(f(M_n)) = E(T'_f(M_n)) - E(M_n T_f(M_n)).$$

16. En utilisant l'inégalité (3) avec $x = M_n$ et $y = M_{n,i}$, on a

$$\left|T_f(M_n) - T_f(M_{n,i}) - \frac{X_i}{\sqrt{n}}T'_f(M_{n,i})\right| \leq \frac{CN(f)}{2n}|X_i|^2.$$

En multipliant par $|X_i|$ on obtient l'inégalité demandée.

$$\left|X_i T_f(M_n) - X_i T_f(M_{n,i}) - \frac{X_i^2}{\sqrt{n}}T'_f(M_{n,i})\right| \leq \frac{CN(f)}{2n}|X_i|^3$$

Comme $E(X_i T_f(M_{n,i})) = E(X_i)E(T_f(M_{n,i})) = 0$, car les variables X_i et $T'_f(M_{n,i})$ sont indépendantes puisque

$M_{n,i} = \frac{S_n - X_i}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j \neq i} X_j$ et $E(X_i) = 0$. De plus $E(X_i^2) = 1$, donc

$$E\left(\frac{X_i^2}{\sqrt{n}}T'_f(M_{n,i})\right) = E(X_i^2)E\left(\frac{1}{\sqrt{n}}T'_f(M_{n,i})\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}E(T'_f(M_{n,i})),$$

on obtient

$$\begin{aligned} \left| E \left(X_i T_f(M_n) - X_i T_f(M_{n,i}) - \frac{X_i^2}{\sqrt{n}} T'_f(M_{n,i}) \right) \right| &\leq E \left(\left| X_i T_f(M_n) - X_i T_f(M_{n,i}) - \frac{X_i^2}{\sqrt{n}} T'_f(M_{n,i}) \right| \right) \\ &\leq \frac{CN(f)}{2n} E(|X_i|^3) \end{aligned}$$

et donc

$$\left| E(X_i T_f(M_n)) - \frac{1}{\sqrt{n}} E(T'_f(M_{n,i})) \right| \leq \frac{CN(f)}{2n}$$

car $E(|X_i|^3) = 1$.

17. On a

$$\begin{aligned} E(M_n T_f(M_n)) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(T'_f(M_{n,i})) &= \sum_{i=1}^n E \left(\frac{X_i}{\sqrt{n}} T_f(M_n) \right) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(T'_f(M_{n,i})) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\left(\sum_{i=1}^n E(X_i T_f(M_n)) \right) - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n E(T'_f(M_{n,i})) \right) \end{aligned}$$

Par suite

$$\left| E(M_n T_f(M_n)) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(T'_f(M_{n,i})) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{CN(f)}{2n} = \frac{CN(f)}{2\sqrt{n}}.$$

18. En utilisant l'inégalité (3), on a pour tout $1 \leq i \leq n$

$$|T'_f(M_n) - T'_f(M_{n,i})| \leq \frac{CN(f)|X_i|}{\sqrt{n}}$$

On appliquant l'espérance on obtient

$$|E(T'_f(M_n)) - E(T'_f(M_{n,i}))| \leq \frac{CN(f)E(|X_i|)}{\sqrt{n}}$$

D'où

$$\left| E(T'_f(M_n)) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(T'_f(M_{n,i})) \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n E(T'_f(M_n)) - E(T'_f(M_{n,i})) \right| \leq \frac{CN(f)}{\sqrt{n}}$$

19. On écrit :

$$\begin{aligned} |E(f(M_n)) - I_f| &= |E(T'_f(M_n) - M_n T_f(M_n))| \\ &\leq \left| E(T'_f(M_n)) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(T'_f(M_{n,i})) \right| + \left| E(M_n T_f(M_n)) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(T'_f(M_{n,i})) \right| \\ &\leq \frac{3CN(f)}{2\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} E(f(M_n)) = I_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

20. On pose $f(x) = \cos(\pi x)$. Par le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} E(f(M_n)) &= E \left(f \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \cos \left(\pi \left(\frac{2k-n}{\sqrt{n}} \right) \right) p(S_n = 2k-n) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \mathfrak{C}_n^k \cos \left(\pi \left(\frac{2k-n}{\sqrt{n}} \right) \right) \end{aligned}$$

D'après les questions 19. et 2.(c), on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \mathfrak{C}_n^k \cos \left(\pi \left(\frac{2k-n}{\sqrt{n}} \right) \right) = I_f = e^{-\frac{\pi^2}{2}}$.